《数学大观》

二十八、牛顿、莱布尼兹与微积分

主 讲 人 ： 青 课

01

牛顿与微积分

牛顿（Newton,1643.1.4—1727.3.31），英国著名的数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家。

牛顿的三大发明：微积分、引力定律、光的性质的理论。

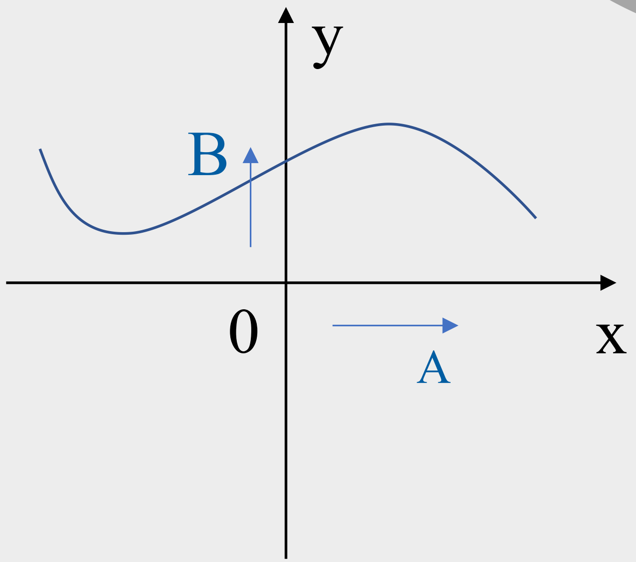
牛顿的数学研究涉及到数论、高次代数方程、解析几何学、数值分析、概率论、曲线分类、变分法等问题，其最突出贡献是他独立地创立了微积分，这方面的工作主要体现在他的三部著作之中。

1.《流数简论》

牛顿微积分的起源是运动学，他在《流数简论》中借助于运动学中描述的连续量及其变化率阐述他的流数理论。

1.《流数简论》

他在坐标系中通过速度分量来研究切线，把曲线f(x,y)=0看作沿x轴与y轴运动的点A和B，他把点A，B随时间变化的“流动速度”称作“流数”。创立了用字母上加一点的符号表示流动变化率。



牛顿还由计算流数之比的基本法则导出函数的积和商的微分法则。

由于牛顿首次引入“流数”和“变化率”的概念，明确提出一般性的微积分算法和微积分基本定理，所以说他“发明了微积分”，定理的证明则是在他的第二本微积分著作中出现的。

2.《运用无穷多项方程的分析学》

1696年，牛顿在他所著的小册子《运用无穷多项方程的分析学》中不仅给出了求变化率的普遍方法，而且证明了微积分基本定理。从计算角度来说，他实际上给出了两个基本的求导和积分公式，用现代符号表示为：

$$\left(ax^m\right)' = max^{m-1}; \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$$

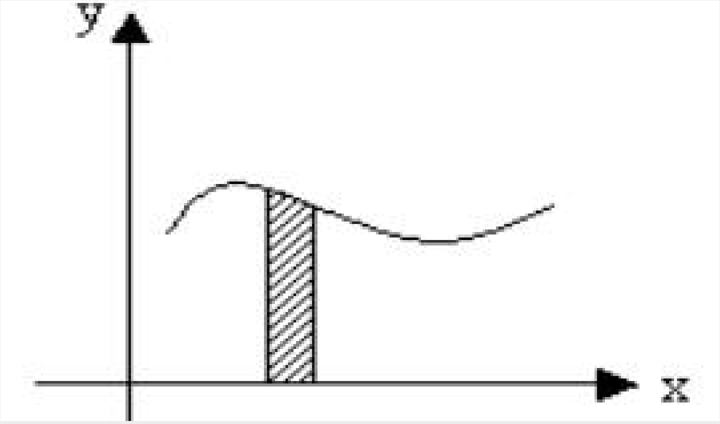
牛顿还给出了函数之和的积分等于各函数的积分的和的法则，在此基础上给出了无穷级数进行这项积分的方法，他已意识到级数收敛和发散的区别，但没有提出收敛的概念。

例如：已知如图一条曲线y，曲线下的面积为z且$z = ax^m$ ①

x变化，得到无穷小量“o”，牛顿称为“瞬”，则z的增量为：

$$z + oy = a\,(x+o)^m = a(x^m + mox^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\,o^2\,x^{m-2} + \ \dots\ + o^m) \quad ②$$

②一①得：$oy = a(mo\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\,o^2\,x^{m-2} + \dots + o^m) \quad ③$



③除以无穷小量o，得： $y = a(mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} ox^{m-2} + \ldots + o^{m-1})$ ④

在④中舍去含有无穷小增量o的项，得： $y = amx^{m-1}$ ⑤

⑤式说明，面积在x点的变化率是曲线在x处的y的值，反之，如果曲线是：$y = amx^{m-1}$，那么，在它下面的面积$z= ax^m$。这也说明求面积与求它的变化率的过程是可逆的。

微积分的基本定理

到此为止，牛顿已经建立起比较系统的微积分理论及算法，不过他在无穷小方法中包含着矛盾。

早在1649年，荷兰数学家纽文蒂就对无穷小量的应用提出了指责，1734年英国大主教贝克莱在其《分析学家》一书中对牛顿的微积分进行了强烈的攻击，由此导致了第二次数学危机，史称“贝克莱悖论”。

贝克莱悖论

$$(x^2)' = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x$$

$\Delta x \neq 0$　　$\Delta x = 0$

这主要在于：

- 他的无穷小增量o是不是0?
- 牛顿虽然提出变化率的概念，但没有提出一个普遍适用的定义，只是把它想象成“流动的”速度。

3.《流数法和无穷级数》（1671年完成，1736年出版）

这是一部内容广泛的微积分专著，是牛顿在数学方面的代表作，牛顿提出了更加完整的理论，此时流数概念已发展到成熟的阶段。

他把以时间为自变量的函数称为流量，用字母表的后几个字母v，x，y，z来表示；把流量的变化率称为流数，用表示流量的字母上加点的方法来表示，如$\dot{x}$，$\dot{y}$以前用的瞬的概念仍然保留，并且仍用o表示。

牛顿在书中引入强有力的代换积分法（采用现代符号）：

设u=φ（x）则，

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

牛顿充分认识到流数法的意义，说它是一种“普遍方法”，它“不仅可以用来画出任何曲线的切线……而且可以用来解决其他关于曲度、面积、曲线的长度、重心的各种深奥的问题”。

02

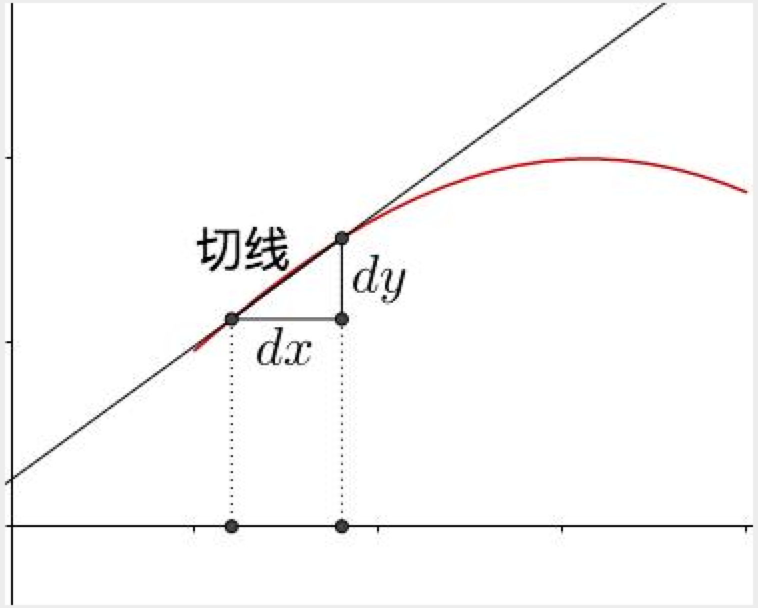
莱布尼兹与微积分

莱布尼兹（1646年-1716年）是德国著名的哲学家、数学家、自然科学家，他的研究涉及诸多领域，并做出了卓越贡献，因而他被誉为“百科全书式的”人物。

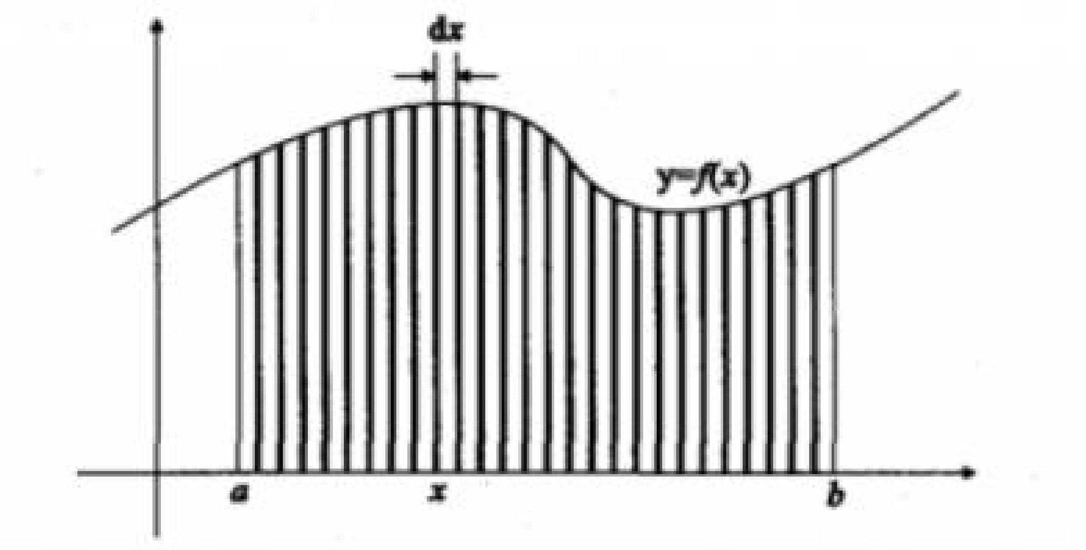
莱布尼兹在数学的最突出贡献是他独立地创立了微积分，这方面的工作主要体现在他的两部著作之中：

（1）《数学笔记》

他的微积分思想来源于对和、差可逆性的研究，他采用dx表示两个相邻x的值的差，用dy表示相邻y值的差，莱布尼兹称其为“微差”。



他一直采用符号 $\int$ 和dx，dy来表示积分与微分，这些符号沿用至今，数学笔记中还提出一系列的微积分法则。



2.《新方法》

这是莱布尼兹公开发表的第一篇微积分论文，是对他的微分成果的概括。

莱布尼兹给出与现今一致的导数定义，还给出微分法则d（xn）=nxn-1dx的证明及函数的和、差、积，商的微分法则的证明，并在文章中讨论了用微分法求切线、求极大值、极小值以及求拐点的方法。

03

莱布尼兹与牛顿微积分的工作比较

在创立微积分方面，莱布尼兹与牛顿功绩相当，他们的主要贡献是：

总结出处理各种有关问题的一般方法，认识到求积问题是与切线问题互逆特征，并揭示出微分学与积分学之间的本质联系，从而提出微积分学的基本定理；建立了能极大地促进微积分学发展的符号体系。

总之，他们创立了作为一门独立学科的微积分学

共同点：

- 各自独立地发现了微积分基本定理，并建立起一套有效的微分和积分算法。
- 他们都把微积分作为一种适用于一般函数的普遍方法。
- 都把微积分从几何形式中解脱出来，采用了代数方法和记号，从而扩展了它的应用范围。
- 都是把面积、体积及以前作为和来处理的问题归结到微积分。
- 微积分基础都是无穷小量。

不同点：

- 研究方法论的角度不同。牛顿作为物理学家，往往致力于能推广为一般方法的具体结果；莱布尼兹作为哲学家，则更多地关心能应用于特殊问题的一般方法。
- 理论基础不同。牛顿以连续运动为出发点，具有比较明显的极限概念；莱布尼兹则以离散的无穷小为出发点，极限观念不甚鲜明。

不同点：

- 研究的侧重点不同。

就微分学而言，牛顿研究变量的流数，考察时间的无穷小瞬和变化率；莱布尼兹则以微分为基本点，把独立的微分dx和dy作为基本概念，面积与体积被设想成无穷多个微分之和。

就积分学而言，牛顿强调变化率问题的反问题即不定积分，莱布尼兹强调微分的无穷和即定积分。

不同点：

- 表达的方式不同。牛顿把无穷级数看成微积分学不可缺少的工具；莱布尼兹更多地倾向于求有限形式的解，并创建了巧妙的符号系统，建立微积分的方式法则体系。

不同点：

- 反映的哲学观不同。牛顿的工作重严谨，推理谨慎；莱布尼兹则比较大胆。
- 就创造与发表的年代看，牛顿创造微积分基本原理比莱布尼兹更早，但莱布尼兹比牛顿先于发表。故发明微积分的荣誉应属于他们二人。

感谢聆听